Jeux de coalitions hédoniques à concepts de solution multiples

Thibaut Vallée[a] thibaut.vallee@unicaen.fr
Grégory Bonnet[a] gregory.bonnet@unicaen.fr

[a]Normandie Université, UNICAEN, GREYC, CNRS UMR 6072

Résumé

Dans un système d'agents autonomes, ces derniers peuvent être amenés à se demander avec qui coopérer sachant que chaque agent préfère interagir avec certains agents plutôt que d'autres. Ce problème est étudié par la formation de coalitions hédoniques qui caractérise les solutions stables au regard des préférences des agents par des concepts de solution. Toutefois, ces derniers ne modélisent qu'un a priori sur le comportement des agents. Par exemple, la stabilité au sens de Nash modélise des agents qui rejoignent les coalitions qu'ils préfèrent sans se soucier des autres. Il pourrait alors être intéressant de concevoir des agents hétérogènes dans leur définition des solutions stables. Pour ce faire, nous proposons un modèle où les agents expriment non seulement leurs préférences sur les autres, mais aussi des préférences sur les concepts de solution.

Mots-clés : *Coalitions, Modèles de comportement agent, Théorie des jeux*

Abstract

In multiagent systems, agents may be led to ask themselves with whom to cooperate, knowing that each of them expresses its own preferences. This problem is studied in hedonic games with solution concepts characterizing the stability of outcomes with respect to the agents' preferences. However, this framework considers an a priori about agents' behaviours. For instance, Nash stability modelizes agents which join coalitions that they prefers without any considerations about the others. Thus, it might also interesting to consider agents which are heterogeneous in their definition of stable solutions. For this purpose, we propose a new hedonic game where agents express preferences on both the coalitions and the solutions concepts.

Keywords: *Behavior models, Coalitions, Game theory*

1 Introduction

Dans un système d'agents autonomes, il est fréquent que ces derniers soient amenés à devoir décider avec qui coopérer et former ainsi des coalitions. Les jeux de coalitions hédoniques modélisent ce problème en considérant des agents hétérogènes, au sens où ses derniers expriment des préférences sur les groupes d'agents qu'ils peuvent rejoindre [6]. Une solution d'un tel jeu est une partition stable : aucun agent n'a d'intérêt à quitter la coalition qui lui a été affectée au regard d'un critère appelé concept de solution. Ce concept de solution est alors un a priori sur le comportement des agents. Par exemple, la stabilité au sens de Nash suppose que chaque agent va chercher à rejoindre une coalition déjà formée s'il la préfère à celle à laquelle il a été affecté. Or, dans un système où les agents sont hétérogènes, ceux-ci n'appliquent pas nécessairement les mêmes règles de stabilité. Il est en effet envisageable que, dans un même jeu, un agent applique la stabilité au sens de Nash et que, dans le même temps, un autre agent plus respectueux des autres ne quitte sa coalition que si cela ne nuit à personne.

Pour répondre à un tel cas de figure, nous proposons dans cet article deux nouveaux modèles de jeux de coalitions hédoniques. Le premier, appelé *jeu de coalitions hédonique à concepts de solution multiples*, permet à chaque agent de considérer un concept de solution qui lui est propre. Dans le second modèle, appelé *jeu de coalitions hédonique à double profil*, les agents expriment des préférences sur un ensemble de concepts de solution. Nous montrons les principales propriétés de ces modèles et proposons une nouvelle notion de stabilité qui minimisent les *concessions* des agents sur les concepts de solution pour trouver une solution non vide.

Après avoir introduit en Section 2 les jeux de coalitions hédoniques canoniques, nous présentons en Section 3 les jeux de coalitions hédoniques à concepts de solution multiples. Nous étendons ensuite dans la section 4 ce modèle aux jeux de coalitions hédoniques à double profil. Nous consacrons les Sections 3.2 et 4.2 à des analyses formelles de ces modèles, et les Sections 3.3 et 4.3 à des analyses empiriques.

2 Jeux hédoniques canoniques

Lorsqu'un ensemble d'agents doit coopérer temporairement dans le but de réaliser des objectifs qui leur sont propres, l'une des problématiques est de décider avec qui coopérer. Il s'agit d'un problème de formation de coalitions (ou jeu de coalitions) consistant à trouver un partitionnement des agents qui les satisfait tous. De nombreux modèles de jeux de coalitions ont été étudiés dans la littérature [1, 3, 6, 7]. Certains s'intéressent à des modèles quantitatifs où les agents cherchent à maximiser leurs utilités, d'autres – les jeux de coalitions hédoniques – s'intéressent à des modèles qualitatifs [6, 7] où chaque agent évalue sa satisfaction en fonction de la coalition à laquelle il appartient.

Définition 1 (HG). *Un* jeu de coalitions hédoniques *est un tuple $HG = \langle N, \succeq \rangle$ où $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble des agents, et $\succeq = \{\succeq_1, \ldots, \succeq_n\}$ est l'ensemble des profils de préférence des agents, c'est-à-dire des préodres totaux avec indifférences sur l'ensemble $G_i = \{C \subseteq N : a_i \in C\}$ des coalitions auxquelles l'agent a_i peut apartenir.*

Trouver la solution d'un jeu de coalitions consiste à trouver une partition stable, c'est-à-dire qu'aucun agent ne peut ou ne veut dévier de sa coalition actuelle. Les concepts de solution caractérisent des propriétés que doit satisfaire toute partition stable. Par exemple, la Pareto-Optimalité est le concept de solution regroupant toutes les partitions telles qu'aucun agent ne puisse quitter sa coalition actuelle pour une autre une coalition qu'il préfère sans dégrader la solution pour au moins un autre agent. De nombreux concepts de solution ont été proposés et étudiés dans la littérature [1, 10, 14]. Remarquons qu'un jeu de coalitions canonique est vu comme un problème statique : les préférences des agents n'évoluent pas en cours de résolution du jeu bien que certains travaux s'intéressent à ces aspects dynamiques [8].

Dans cet article, nous considérons un jeu hédonique statique et les différents concepts de solution canoniques présentés dans la Table 1. Nous désignons par Π une partition des agents, par $C_i(\Pi)$ la coalition de l'agent a_i dans cette partition. Une partition Π est stable au sens d'un concept de solution SC si et seulement si elle satisfait la propriété qui caractérise SC. De manière intéressante, les concepts de solution peuvent être définis en composant différentes caractérisations de déviations autorisées [14]. Par exemple, la *stabilité contractuelle de Nash* est le concept de solution autorisant un agent à dévier de sa coalition actuelle pour en rejoindre une qu'il préfère (stabilité de Nash), sous réserve que cette déviation ne dégrade pas la solution pour les autres membres de la coalition qu'il quitte (stabilité contractuelle). Ainsi, les déviations autorisées représentent des comportements d'agents et leurs caractérisations sont porteuses d'un a priori sur eux. Par exemple, la *stabilité de Nash* modélise des agents individualistes qui ne considèrent que leurs propres préférences, contrairement à la *stabilité individuelle contractuelle* qui est une prise en compte de la collectivité puisque l'agent ne déviera que si les autres l'acceptent.

3 Concepts de solution locaux

Si les concepts de solution sont porteurs d'a priori sur le comportement individuel des agents, ce sont surtout des *concepts de solution globaux* porteurs d'un a priori qui s'applique à tous les agents comme l'indiquent les termes soulignés dans la Table 1. Afin de considérer des agents hétérogènes dans leur définition de la stabilité, nous proposons alors un jeu hédonique qui ne considère non plus le concept de solution comme une donnée externe au jeu, mais comme un paramètre du jeu exprimé par chaque agent sous forme de *concepts de solution locaux*.

3.1 Du global au local

Si les concepts de solution canoniques caractérisent des propriétés qui doivent être vraies *pour tous les agents*, nous exprimons ces propriétés du point de vue de chaque agent : un concept de solution local caractérise une propriété vraie *pour un agent fixé*.

Définition 2 (LSC$_i$). *Soit $HG = \langle N, \succeq \rangle$ un jeu de coalitions hédonique, SC un concept de solution global et $a_i \in N$ un agent. Le* concept de solution local *LSC_i caractérise l'ensemble des partitions Π de N qui vérifient les propriétés de SC pour l'agent a_i.*

Pour chaque concept canonique x, nous définissons Lx_i comme le concept de solution local

Concept de solution canonique	Acronyme	Propriété
Rationnalité Individuelle	RI	$\underline{\forall a_i \in N}, C_i(\Pi) \succeq_i \{a_i\}$
Stabilité de Nash	NS	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$
Stabilité Individuelle	IS	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$
Stabilité Individuelle Contractuelle	ICS	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
Stabilité Contractuelle de Nash	CNS	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
Stabilité du Cœur	CS	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in G_i : C \succ_i C_i(\Pi)$ $\wedge \forall a_j \in C, C \succeq_j C_j(\Pi)$
Optimalité	O	$\underline{\forall a_i \in N}, \nexists C \in G_i : C \succ_i C_i(\Pi)$
Pareto-Optimalité	PO	$\nexists \Pi_2 : \underline{\forall a_i \in N}, C_i(\Pi_2) \succeq_i C_i(\Pi)$ $\wedge \exists a_j \in N, C_j(\Pi_2) \succ_j C_j(\Pi)$

TAB. 1 – Principaux concepts de solution canoniques

pour un agent $a_i \in N$ (résumés en Table 2). Nous pouvons ainsi modéliser des jeux où une partition Π est stable du point de vue d'un agent a_i s'il n'existe pas de coalitions qu'il désirerait rejoindre ($\Pi \in LNS_i$) et est stable du point de vue d'un autre agent a_j si toute déviation de sa part dégrade la solution pour au moins un autre agent ($\Pi \in LPO_j$).

Définition 3 (MHG)**.** *Un* jeu de coalitions hédonique à concepts de solution multiples *est un triplet $MHG = \langle N, \succeq, LSC \rangle$ où $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est l'ensemble des agents, $\succeq = \{\succeq_1, \ldots, \succeq_n\}$ l'ensemble des profils de préférence des agents vis-à-vis des coalitions, et $LSC = \{LSC_1, \ldots, LSC_i\}$ l'ensemble des concepts de solution locaux des agents.*

Trouver une solution d'un MHG revient à trouver une partition qui satisfait le concept de solution local de chaque agent.

Définition 4 (Stabilité d'un MHG)**.** *Soit un MHG. Une partition Π est* stable *si $\forall a_i \in N, \Pi \in LSC_i$. L'ensemble des partitions stables d'un MHG est noté MS.*

Exemple 1. *Considérons le jeu $HG = \langle N, \succeq \rangle$ avec $N = \{a_1, a_2, a_3\}$ et les profils de préférence suivants :*

$$\succeq_1 = \{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_2 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_2\}$$

$$\succeq_3 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$$

Avec trois agents, il y a cinq partitions :

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \{\{a_1, a_2, a_3\}\} \\
\Pi_2 &= \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\} \\
\Pi_3 &= \{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\} \\
\Pi_4 &= \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\} \\
\Pi_5 &= \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}
\end{aligned}$$

La Table 3 montre l'appartenance de ces partitions aux concepts de solution locaux du point de vue de l'agent a_1. Si par exemple $LSC = \{LNS_1, LR_2, LPO_3\}$ alors $MS = \{\Pi_2, \Pi_4\}$. Notons que Π_1 et Π_3 ne satisfont aucun des concepts de solution locaux de a_1. Donc, quoi que a_1 exprime, ces deux partitions ne peuvent pas être stables.

3.2 Propriétés des MHG

Les concepts de solution locaux ont les mêmes propriétés que leurs équivalents globaux et, donc, ne les dénaturent pas. En premier lieu, les concepts de solution globaux ont des propriétés d'inclusions [3]. Par exemple, $NS \subseteq IS \subseteq ICS$. Trivialement, au vu de leur définition, les concepts de solution locaux satisfont les mêmes propriétés, résumées dans la Figure 1. Par exemple, une partition LNS ne tient pas compte des préférences des autres agents et est

Concept local	**Propriété**
LRI_i	$C_i(\Pi) \succeq_i \{a_i\}$
LNS_i	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi)$
LIS_i	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$
$LICS_i$	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \cup \{a_i\} \succeq_j C$ $\wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
$LCNS_i$	$\nexists C \in \Pi \cup \{\emptyset\} : C \cup \{a_i\} \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_k \in C_i(\Pi), a_k \neq a_i, C_i(\Pi) \setminus \{a_i\} \succeq_k C_i(\Pi)$
LCS_i	$\nexists C \in G_i : C \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in C, C \succeq_j C_j(\Pi)$
LO_i	$\nexists C \in G_i : C \succ_i C_i(\Pi)$
LPO_i	$\nexists \Pi_2 : C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi) \wedge \forall a_j \in N, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$

TAB. 2 – Concepts de solution locaux pour un agent $a_i \in N$

LSC	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
LR_1		✓		✓	✓
LNS_1		✓		✓	
LIS_1		✓		✓	
$LICS_1$		✓		✓	
$LNCS_1$		✓		✓	
LCS_1		✓		✓	
LO_1				✓	
LPO_1		✓		✓	

TAB. 3 – Partitions stables selon a_1

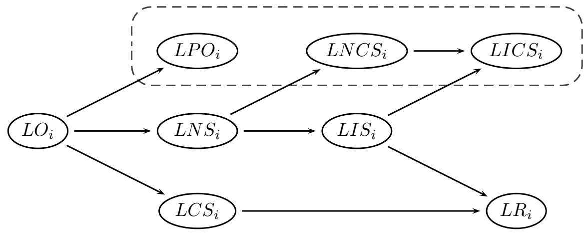

FIG. 1 – Relations d'inclusions entre Lx_i

donc nécessairement incluse dans LIS, $LCNS$, $LICS$, LR. L'hyperarête en pointillés indique les concepts de solution *irrationnels*, c'est-à-dire que les concepts dont la satisfaction ne garantit pas à l'agent d'être dans une coalition a minima équivalente en termes de préférences à sa coalition singleton. En second lieu, si tous les agents expriment le même concept de solution local, nous retrouvons les partitions stables du concept de solution global associé.

Propriété 1. *Soit un MHG. Si* $\forall a_i, a_j \in N, LSC_i = LSC_j$ *et SC le concept global dont dérive* LSC_i *alors* $\bigcap_{a_i \in N} LSC_i = SC$.

Nous présentons ici uniquement la preuve pour PO. Les preuves pour les autres concepts de solution globaux sont similaires.

Démonstration. Soit un MHG tel que l'ensemble des agents expriment l'optimalité au sens de Pareto locale. L'ensemble LPO des partitions Localement Pareto-Optimale pour tous les agents est tel que :

$$LPO = \bigcap_{a_i \in N} LPO_i$$

Montrons dans un premier temps que, pour toute partition $\Pi \in LPO$, nous avons $\Pi \in PO$. Supposons que $\Pi \notin PO$. Par définition de PO, nous avons nécessairement $\exists \Pi_2, \exists a_i \in N$ tels que $C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi)$ et que $\forall a_j \in N \setminus \{a_i\}, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$. Ainsi, selon la définition de LPO, nous avons $\Pi \notin LPO_i$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Montrons maintenant que, pour toute partition $\Pi \in PO$, nous avons $\Pi \in LPO$. Supposons qu'il existe un agent a_i tel que $\Pi \notin LPO_i$. Par définition de LPO_i, nous avons $\exists \Pi_2 : C_i(\Pi_2) \succ_i C_i(\Pi)$ et $\forall a_j \in N \setminus \{a_i\}, C_j(\Pi_2) \succeq_j C_j(\Pi)$. Ceci est en contradiction avec $\Pi \in PO$.

Par conséquent, $\Pi \in LPO$.

Donc, nous avons $PO = \bigcap_{a_i \in N} LPO_i$. $\square$

Remarquons que les MHG peuvent avoir des solutions stables qui ne correspondent à aucun concept de solution canonique.

Propriété 2. *Il existe des MHG tels que $\exists \Pi \in MS$ où, pour tout concept de solution canonique SC indiqué en Table 1, $\Pi \notin SC$.*

L'Exemple 2 illustre ce phénomène.

Exemple 2. *Considérons le jeu $MHG = \langle N, \succeq, LSC \rangle$ avec $N = \{a_1, a_2, a_3\}$, $LSC = \{LIS_1, LICS_2, LRI_3\}$ et les profils de préférence suivants :*

$$\succeq_1 = \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_3\}$$

$$\succeq_2 = \{a_2, a_3\} \succ \{a_2\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\}$$

$$\succeq_3 = \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\} \succ \{a_2, a_3\} \succ \{a_3\}$$

Ce jeu a trois partitions stables : $\{\{a_1, a_2, a_3\}\}$, $\{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\}$ et $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$. Si les deux premières satisfont des concepts de solution canoniques, la partition $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$ n'en satisfait aucun. Dans cette partition, la grande coalition est préférée par tous les agents à leurs coalitions respectives mais, en exprimant la rationalité comme concept de solution local, l'agent a_3 désire jsute être satisfait et ne cherche pas à dévier vers sa coalition optimale. De plus, les agents a_1 et a_2 pourraient former la grande coalition s'ils considéraient des déviations collectives, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, chaque agent attend que se soient les autres qui dévient.

Intéressons-nous maintenant à l'existence des partitions stables dans un MHG. Si tous les concepts de solution globaux ne garantissent pas l'existence d'une partition stable, tous les concepts de solution locaux garantissent l'existence d'une partition stable selon a_i.

Propriété 3. *Soit un MHG. Pour tout agent $a_i \in N$ et tout concept de solution local LSC_i indiqué dans la* TAB. 2*, il existe au moins une partition Π de N telle que $\Pi \in LSC_i$.*

En effet, indépendamment de l'agent et du concept de solution local que cet agent exprime, l'ensemble des partitions contenant sa coalition optimale sont nécessairement localement stable.

Démonstration. Soit un MHG, un agent $a_i \in N$, et $C_i^* \in G_i$ l'une des coalitions telles qu'aucune autre coalition C ne soit strictement préférée à C_i^* par a_i : $\forall C \in G_i, C_i^* \succeq_i C$. C_i^* est la coalition optimale pour l'agent a_i. Par définition, de l'optimalité locale, toute partition Π contenant C_i^* est nécessairement localement optimale. Ainsi, $LO_i \neq \emptyset$. Par inclusion des concepts de solution, toute partition $\Pi \in LO_i$ appartient également aux autres concepts de solution locaux. Ainsi, quel soit LSC_i, cette partition Π est localement stable. $\square$

Cependant, cette propriété ne garantit pas l'existence d'une partition satisfaisant les concepts de solution locaux de chaque agent. Ainsi, il existe des MHG tels que $MS = \emptyset$.

Exemple 3. *Soit un MHG tel que $N = \{a_1, a_2\}$, $\succeq_1 = \{a_1\} \succ_1 \{a_1, a_2\}$, $\succeq_2 = \{a_1, a_2\} \succ_2 \{a_2\}$ et $LSC = \{LO_1, LO_2\}$. Ce jeu possède deux partitions : $\Pi_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}\}$ et $\Pi_2 = \{\{a_1, a_2\}\}$. Par définition, il n'existe pas de partition dans O alors que $LO_1 = \{\Pi_1\}$ et $LO_2 = \{\Pi_2\}$.*

La complexité des jeux de coalitions hédoniques a été largement étudiée dans la littérature [1, 2, 10]. Dans la majorité des cas, trouver une partition stable pour un concept de solution donné est un problème NP-complet [10] sauf pour quelques exceptions comme la recherche de partitions individuellement rationnelles ou de partitions stables au sens du cœur dans les jeux de coalitions à $\mathcal{W}\beta$-préférences [7].

Propriété 4. *Trouver une partition stable dans un MHG est un problème équivalent à celui de trouver une partition satisfaisant le concept de solution SC dans un HG canonique où SC est le concept de solution global appartenant au plus haut niveau de la hiérarchie polynomiale parmi tous les concepts de solution globaux associés aux concepts de solution locaux de MHG.*

Intuition de la preuve. Considérons $MHG = \langle N, LSC, \succeq \rangle$ et $HG = \langle N, \succeq \rangle$ le jeu hédonique tel que les agents et leurs profils de préférence soient identiques dans les deux jeux. Soit SC^* le concept de solution appartenant au plus haut niveau de la hiérarchie polynomiale parmi parmi tous les concepts de solution globaux associés aux concepts de solution locaux LSC et LSC_i^* son équivalent local pour l'agent a_i. Pour une partition Π donnée, vérifier que Π est stable dans MHG revient à vérifier que $\forall a_i \in N, \Pi \in LSC_i$. De même, vérifier $\Pi \in SC^*$ dans HG revient à vérifier que $\forall a_i \in N, \Pi \in LSC_i^*$. Comme il existe au moins un agent a_i tel que $LSC_i = LSC_i^*$, les deux problèmes sont équivalents. Donc, trouver une partition stable dans un MHG peut être réduit à trouver une solution pour SC^* et est donc un problème du même niveau dans la hiérarchie polynomiale. $\square$

3.3 Analyse empirique

De nombreux concepts canoniques n'ont en pratique que peu de solutions. Qu'en est-il des MHG ? Pour étudier cela empiriqement, considérons un ensemble de 3 à 7 agents choisissant de manière uniforme leur relation de préférence et un concept de solution local. Nos résultats reposent sur 1000 jeux aléatoires [1]

La Table 4 présente (par ordre quasi-croissant) le nombre moyen de partitions stables (colonne $|MS|$) ainsi que le nombre de solutions satisfaisant les concepts de solution globaux canoniques. La colone $\mathcal{B}_n$ présente à titre indicatif le nombre de partitions pour n agents. Le point essentiel est que ce nombre de partitions stables est plus grand que presque tous ceux des concepts de solution rationnels (NS, IS, CS et O) et plus faible que ceux des concepts de solution irrationnels (CIS, CNS, PO). Seule la rationnalité individuelle fait exception à cette règle. En effet, ce concept de solution est très faiblement contraint et permet l'existence d'un nombre important de partitions stables. Cependant, il ne garantit aux agents que d'être dans une coalition qui n'est pas moins préférée que leurs coalitions singletons respectives alors que les autres concepts assurent qu'il n'existe pas de solution préférable pour tous les agents.

Notre modèle exprime donc un compromis entre les concepts de solution rationnels et les concepts irrationnels : seuls les agents acceptant des concepts de solution locaux irrationnels peuvent être affectés à une coalition irrationnelle de leur point de vue.

La Figure 2 présente la proportion de partitions stables qui satisfont aussi un concept de solution canonique. Une grande proportion des partitions stables sont également Pareto-optimales ou individuellement contractuellement stables. Par exemple, 86% des partitions stables à 7 agents sont également Pareto-optimale. Notre modèle est donc essentiellement une restriction de ces deux concepts tout en permettant parfois des solutions ne correspondant à aucun concept canonique (voir Propriété 2 et groupe de données "Aucun" de la Figure 2).

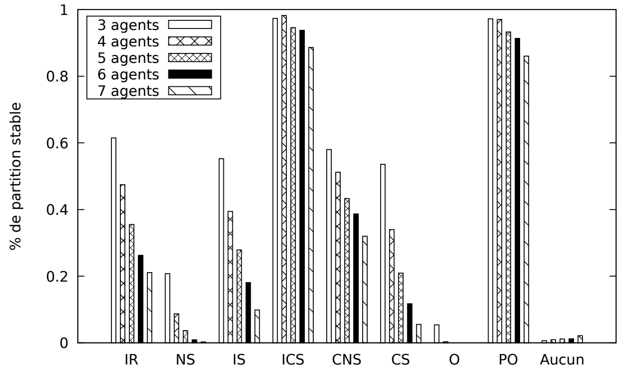

FIG. 2 – Taux de satisfaction des concepts de solution canoniques parmi les partitions stables

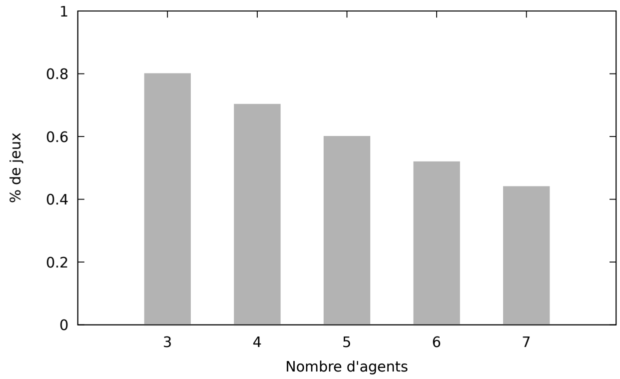

FIG. 3 – Taux de jeux ayant au moins une partition stable en fonction du nombre d'agents

Enfin, la Figure 3 indique la proportion de MHG ayant au moins une partition stable. Avec 3 agents, près de 80% des jeux ont au moins une solution. Cette proportion décroit fortement et tombe à un peu plus de 40% pour 7 agents. L'absence de solution stable peut s'expliquer par le fait que certains agents expriment des propriétés *trop restrictives*. Si ces agents pouvaient accepter de réduire leurs exigences en considérant un autre concept de solution local, le jeu aurait peut-être une solution. C'est pourquoi nous étendons notre modèle en permettant aux agents d'exprimer des préférences entre les concepts de solution locaux qu'ils acceptent de considérer.

1. Nous sommes conscients des limites de cette étude, car, en considérant des profils de préférence stricts tirés uniformément, n agents et m concepts de solution locaux, il y a $(m \times 2^{n-1}!)^n$ jeux différents, soit 7077888 jeux pour 3 agents. Notons cependant qu'un grand nombre de ces jeux sont symétriques.

	Concepts canoniques rationnels						Concepts canoniques irrationnels			
n	O	NS	CS	IS	RI	**MS**	CNS	PO	CIS	$\mathcal{B}_n$
3	$0,084$	$0,343$	$1,024$	$1,09$	$1,968$	$\mathbf{1,199}$	$1,629$	$2,949$	$3,003$	5
4	$0,007$	$0,219$	$1,12$	$1,399$	$3,269$	$\mathbf{1,547}$	$3,444$	$6,869$	$7,591$	15
5	0	$0,158$	$1,177$	$1,892$	$6,44$	$\mathbf{2,193}$	$8,5$	$18,35$	$22,49$	52
6	0	$0,095$	$1,241$	$2,836$	$13,745$	$\mathbf{3,14}$	$24,355$	$54,126$	$74,765$	203
7	0	$0,054$	$1,3$	$4,86$	$31,882$	$\mathbf{6,053}$	$77,5475$	$171,896$	$275,073$	877

TAB. 4 – Nombre moyen de partitions stables selon les concepts de solution et le nombre d'agents

4 Préférences sur les concepts

4.1 Modélisation des nouvelles préférences

Nous étendons le modèle précédent en y introduisant des profils de préférence sur les concepts de solution locaux.

Définition 5 (HG2P). *Un* jeu de coalitions hédoniques à double profil *est un tuple* $HG2P = \langle N, LSC, \succeq^C, \succeq^{LSC} \rangle$ *où* $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *est l'ensemble des agents,* LSC *un ensemble de concept de solution locaux,* $\succeq^C = \{\succeq_1^C, \ldots, \succeq_n^C\}$ *l'ensemble des profils de préférence des agents sur les coalitions, et* $\succeq^{LSC} = \{\succeq_1^{LSC}, \ldots, \succeq_n^{LSC}\}$ *l'ensemble des profils de préférence des agents sur des sous-ensembles non vides de* LSC.

Commee chaque agent exprime ses préférences sur un sous-ensemble de LSC, les relations $\succeq_i^{LSC}$ sont incomplètes. Par exemple, un agent a_1 qui désire garantir à minima une rationalité individuelle peut ne pas exprimer de préférence sur les concepts de solution irrationnels (CNS, PO, CIS). De plus, les concepts de solution exprimés peuvent être distincts entre les agents. Trivialement, un MHG est un cas particulier de HG2P : le sous-ensemble de LSC considéré par chaque agent est un singleton. Il est en de même pour un HG canonique. Dans la suite, par abus de notation, nous désignons par $LSC' \in \succeq_i^{LSC}$ le fait que l'agent a_i considère le concept de solution local LSC' dans son profil de préférence. Nous notons aussi $r_i(LSC')$ le rang du concept de solution local LSC' dans $\succeq_i^{LSC}$. Si $LSC' \notin \succeq_i^{LSC}$ nous considérons que $r_i(LSC) = \infty$.

4.2 Stabilité et concessions

La stabilité d'une partition dépend du nombre de *concessions sur* $\succeq^{LSC}$ qu'elle implique.

Définition 6 (Vecteur de concessions). *Soit un* $HG2P$ *et* Π *une partition de* N. *Le vecteur de* concessions *de* Π *est le vecteur* $\vec{c}(\Pi)$ *où :*

$$c_i(\Pi) = \begin{cases} r(LSC_i^*) & \textit{si } \exists\, LSC_i \in \succeq_i^{LSC} \\ & \textit{tel que } \Pi \in LSC_i \\ \infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

$$\textit{avec } LSC_i^* = \underset{LCS_i \in \succeq_i^{LSC} : \Pi \in LSC_i}{\operatorname{argmin}} r(LSC_i).$$

Intuitivement, le vecteur de concessions d'une partition représente combien de fois chaque agent doit choisir un concept de solution local moins préféré afin que la partition Π soit localement stable. Remarquons que si $\exists a_i \in N$ tel que $c_i(\Pi) = \infty$ alors Π n'appartient à aucun des concepts de solution considérés par l'agent a_i et donc ne peut pas être stable. Dans la suite, nous nommons concession de l'agent a_i la i-ème composante du vecteur de concessions.

À partir des vecteurs de concessions, nous proposons un nouveau concept de solution *global* : la stabilité au sens de la leximin-concession. Ce concept est inspiré de la règle de sélection leximax définie par [11, 5] et du dernier cœur dans les jeux à utilité transférable [13]. Il s'agit ici de chercher les partitions qui minimisent le nombre de concessions de l'agent ayant la concession maximale parmi tous les agents, puis la concession du second agent ayant la plus importante valeur, et ainsi de suite. Pour cela, nous ordonnons les vecteurs de concessions par ordre croissant de composantes et les comparons deux-à-deux par ordre lexicographique inverse. Toute partition dont le vecteur de concessions n'est pas dominé est considérée comme stable au sens de la *leximin-concession*, ou plus simplement appelée *partition leximin-stable*.

Définition 7 (Leximin-concession). *Soit un* $HG2P$ *et* Π *une partition de* N. Π *satisfait la* leximin-concession *si :*

(1) $\nexists\, a_i \in N$ *tel que* $c_i(\Pi) = \infty$,

(2) $\nexists\, \Pi'$ telle que, pour $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. $\{y_1, \ldots, y_n\}$) l'ensemble ordonné des composantes de $\vec{c}(\Pi)$ (resp. $\vec{c}(\Pi')$), il existe $k \in [1, n]$ vérifiant $x_k > y_k$ et $\forall i \in [1, k-1], x_i = y_i$

Exemple 4. *Reprenons l'Exemple 1 en y ajoutant les profils de préférence sur les concepts de solution locaux donnés en Table 5. La Table 6 indique les vecteurs de concessions de chaque partition. Comme montré dans l'Exemple 1, les partitions Pi_1 et Pi_4 ne peuvent pas être stable puisqu'elles n'appartiennent à aucun des concepts de solution locaux à l'agent a_1. Parmi les 3 partitions restantes, la partition $\Pi_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$ est celle qui est stable au sens de la leximin-concession.*

Remarquons que, comme tout jeu de coalitions hédonique canonique peut être modélisé par un HG2P, un HG2P ne possède pas nécessairement de partition stable au sens de la leximin-concession. Cependant, comme certains concepts de solution canoniques dans un HG garantissent l'existence d'une solution, des conditions simples permettent d'assurer l'existence d'au moins une partition leximin-stable.

Propriété 5. *Il existe au moins une solution Leximin-concédée dans un HG2P si et seulement si il existe un concept de solution global SC tel que (1) $\forall HG$, $SC \neq \emptyset$, et (2) $\forall\, a_i \in N$, le concept de solution local LSC_i associé à SC est exprimé dans $\succeq_i^{LSC}$.*

Rappelons que, parmi les concepts canoniques que nous considérons, la rationalité, la Pareto-optimalité et la stabilité individuelle contractuelle garantissent l'existence d'une partition stable [2, 3, 14].

Démonstration. Montrons tout d'abord que si au moins un agent n'exprime pas une préférence sur un concept de solution local LCS^* tel que le concept global associé SC^* garantisse l'existence d'une solution pour tout HG alors il n'existe pas nécessairement de partition leximin-stable. Fixons un jeu $HG2P = \langle \{a_1, a_2\}, LSC, \succeq^C, \succeq^{LSC} \rangle$ tel que :

$$\{a_1, a_2\} \succ_1^C \{a_1\} \text{ et } \{a_2\} \succ_2^C \{a_1, a_2\}$$

$$LPO_1 \succ_1^{LSC} LNS_1 \text{ et } LNS_2 \succ_2^{LSC} LR_2$$

Ici, l'agent a_1 définit ses préférences sur deux concepts de solution locaux dont les correspondants globaux ne garantissent pas l'existence d'une solution. Or, comme illustré sur la Table 7, il n'existe pas de partition Π telle que $\forall a_i \in N, c_i(\Pi) \neq \infty$. Ce jeu n'a donc pas de partition leximin-stable.

Montrons maintenant que si tous les agents expriment leurs préférences sur un concept de solution local LCS^* tel que le concept global associé SC^* garantisse l'existence d'une solution pour tout HG alors il existe nécessairement une partition leximin-stable. Soit un HG2P tel que $\forall a_i \in N$, $LSC^* \in \succ_i^{LSC}$. Soit le jeu hédonique classique $HG = \langle N, \succ \rangle$ tel que les agents aient les même préférences vis-à-vis des coalitions dans HG et dans HG2P. Par définition, $SC^* \neq \emptyset$ dans HG. Fixons une partition de HG2P telle que $\Pi^* \in SC^*$. Par la Propriété 1, nous avons nécessairement $\forall i \in N, \Pi^* \in LSC_i^*$. Ainsi, $\forall\, a_i$, $c_i(\Pi^*) \neq \infty$. Selon la Définition 7, soit Π^* est une partition Leximin-concédée, soit $\exists\, \Pi$ telle que pour $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. $\{y_1, \ldots, y_n\}$) l'ensemble ordonné des composantes de $\vec{c}(\Pi^*)$ (resp. $\vec{c}(\Pi)$), il existe $k \in [1, n]$ vérifiant $x_k > y_k$ et $\forall i \in [1, k-1], x_i = y_i$. Si une telle partition Π existe, soit elle est elle-même leximin-stable, soit par induction il existe une autre partition Π' leximin-stable. Dans les trois cas, il existe une partition leximin-stable dans HG2P. $\square$

Si cette condition peut sembler restrictive, il est raisonable en pratique que chaque agent a_i exprime au moins $LR_i \in \succ_i^{LCS}$ en dernier rang de ses préférences. En effet, ceci représente le fait que si les agents n'arrivent pas à trouver une solution les satisfaisant tous alors ils ne coopéreront pas et formeront leurs coalitions singletons.

4.3 Analyse empirique des concession

Reprenons le protocole expérimental de la Section 3.3, la Figure 4 présente la proportion des vecteurs de concessions pour 5 agents sur 10000 jeux aléatoires. Nous ne considérons ici que des vecteurs anonymes : le vecteur de concessions $[3, 2, 1, 2, 1]$ est équivalent au vecteur $[1, 1, 2, 2, 3]$ par exemple. Avec environ 60% de jeux sans concession, nous retrouvons la même proportion de partitions stables que dans les MHG – comme illustré sur la Figure 3 – et 30% des jeux ne nécessite qu'une seul concession de la part d'un unique agent. De manière globale, un peu plus de 98% des jeux nécessitent aux plus que 2 agents concédent une fois leurs préférences. Les autres vecteurs de concessions sont quant à eux des cas anecdotiques. Par exemple, seul 1 jeu sur 10000 néces-

N	$\{a_1, a_2, a_3\}$
LSC	$\{LR, LNS, LIS, LICS, LNCS, LCS, LPO, LO\}$
$\succeq_1^C$	$\{a_1, a_2\} \succ \{a_1\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$
$\succeq_2^C$	$\{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2\} \succ \{a_2\}$
$\succeq_3^C$	$\{a_2, a_3\} \succ \{a_1, a_2, a_3\} \succ \{a_3\} \succ \{a_1, a_3\}$
$\succeq_1^{LSC}$	$LO \succ LNS \succ LCS \succ LIS \succ LNCS \succ LR \succ LICS \succ LPO$
$\succeq_2^{LSC}$	$LO \succ LNS \succ LIS \succ LCS \succ LR \succ LNCS \succ LICS \succ LPO$
$\succeq_3^{LSC}$	$LO \succ LPO \succ LNS \succ LIS \succ LNCS \succ LICS \succ LCS \succ LR$

TAB. 5 – Préférences des agents sur les concepts de solution locaux

Π	$\vec{c}(\Pi)$
$\Pi_1 = \{\{a_1, a_2, a_3\}\}$	$[\infty, 2, 3]$
$\Pi_2 = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$	$[2, 1, 1]$
$\Pi_3 = \{\{a_1, a_3\}, \{a_2\}\}$	$[\infty, 5, \infty]$
$\Pi_4 = \{\{a_1, a_2\}, \{a_3\}\}$	$[1, 5, 2]$
$\Pi_5 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$	$[6, 5, 8]$

TAB. 6 – Vecteur de concessions des partitions

	$\{\{a_1\}, \{a_2\}\}$	$\{\{a_1, a_2\}\}$
LPO_1		✓
LNS_1		✓
LNS_2	✓	
LR_2	✓	
$\vec{c}(\Pi)$	$[\infty, 1]$	$[1, \infty]$

TAB. 7 – Satisfaction des concepts locaux

site que 2 agents concédent 2 fois leurs préférences pour trouver une partition leximin-stable.

La Figure 5 présente la concession moyenne des agents et leur écart-type sur 1000 jeux. Bien qu'augmentant légèrement avec le nombre d'agents, elles varient entre $0,08$ et $0,11$ entre 3 et 7 agents. Ainsi, de manière générale, un agent n'est contraint à concéder sur ses préférences que dans 1 jeu sur 10. L'augmentation de l'écart-type indique que plus les agents sont nombreux, plus ils doivent concéder sur leurs préférences pour obtenir une partition leximin-stable. Toutefois, 98% des jeux avec 5 agents n'ont au plus que deux concessions. Ce chiffre tombe à 89% sur les jeux à 7 agents.

Ainsi, s'il est possible de trouver une partition leximin-stable où tous les agents concédent au maximum leurs préférences, il apparaît que ces cas sont extrêmement rares [2] et que, dans leur grande majorité, les jeux de coalitions hédoniques à double profil sont stables avec un très faible nombre de concessions.

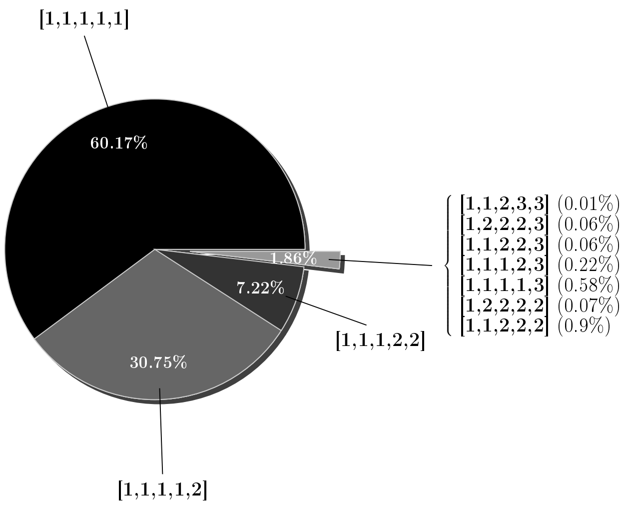

FIG. 4 – Proportions des concessions

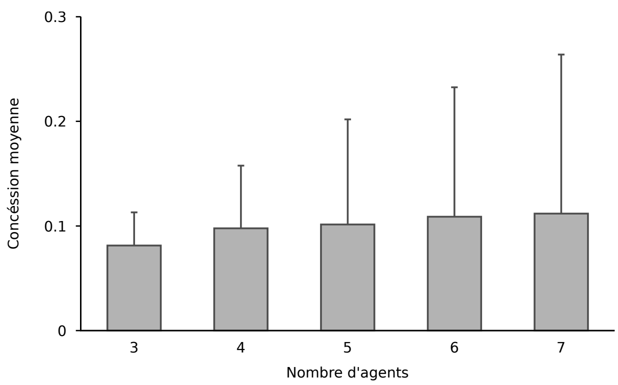

FIG. 5 – Concessions moyennes par agent

5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous considérons un problème de la formation de coalitions hédoniques où des agents hétérogènes expriment des concepts de solution différents. Pour ce faire, nous proposons les *jeux de coalitions hédoniques à*

2. Nous n'avons jamais observé ce cas dans nos expérimentations.

concepts de solution multiples (MHG) qui utilisent des *concepts de solution locaux* et les *jeux de coalitions hédoniques à double profil* (HG2P) où les agents expriment des préférences entre ces concepts locaux. Trouver une partition stable revient alors respectivement à trouver une partition qui satisfait les concepts de solution locaux de chaque agent au sens de la *leximin-concession*. Nous avons montré que les concepts de solution locaux satisfont les mêmes propriétés que leurs équivalents globaux, en particulier les propriétés d'inclusion, et stabilisent des partitions qui n'appartiennent à aucun concept global canonique. De plus, nos expériences montrent que, si quelques rares jeux nécessitent plusieurs concessions pour avoir une solution, la majorité des jeux ont une solution où seulement un ou deux agents doivent concéder d'un rang dans leurs préférences.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives sur les modèles en eux-mêmes et leur intégration dans un cadre plus large. Comme nos modèles permettent d'obtenir des partitions stables qui ne correspondent à aucun concept de solution canonique couramment étudié, il serait intéressant de caractériser ces partitions et d'en étudier les propriétés. De plus, puisque nos modèles s'appuient sur plusieurs concepts de solution, analyser leur complexité en moyenne plutôt qu'au pire cas semble pertinent. Enfin, nous travaillons actuellement sur un protocole de formation de coalitions décentralisé pour les HG2P. Dans ce contexte, il serait intéressant de se pencher sur les critères permettant à un agent de concéder et une analyse des conséquences des différentes concessions (sur les concepts de solution) vis-à-vis de la satisfaction (sur les coalitions) des agents est nécessaire. En termes de perspectives plus larges, ce travail s'inscrit au sein d'un projet portant sur la modélisation d'agents éthiques. Or, les concepts de solution peuvent être associés à des *valeurs humaines* [12] que les agents doivent respecter. Par exemple, dans les jeux de coalitions à utilité transférable, la valeur de Shapley peut être associée l'*équité* ou la valeur de Nowak à la *solidarité* [9]. Il serait donc intéressant de spécifier en termes de valeurs les préférences des agents et d'intégrer ce travail dans une architecture d'agent éthique, comme par exemple celle de Cointe *et al.* [4].

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR ETHICAA (ANR-13-CORD-0006).

Références

[1] Haris Aziz, Felix Brandt, and Hans Georg Seedig. Computing desirable partitions in additively separable hedonic games. *Artificial Intelligence*, 195 :316–334, 2013.

[2] Coralio Ballester. NP-completeness in hedonic games. *Games and Economic Behavior*, 49(1) :1–30, 2004.

[3] Anna Bogomolnaia and Matthew O. Jackson. The stability of hedonic coalition structures. *Games and Economic Behavior*, 38(2) :201–230, 2002.

[4] Nicolas Cointe, Grégory Bonnet, and Olivier Boissier. Ethical judgment of agents' behaviors in multi-agent systems. In *15th AAMAS*, pages 1106–1114, 2016.

[5] Fabien Delecroix, Maxime Morge, Thomas Nachtergaelle, and Jean-Christophe Routier. Multi-party negotiation with preferences rather than utilities. *Int. J. of Cloud Computing*, 12(2) :27, 2016.

[6] Jacques H. Dreze and Joseph Greenberg. Hedonic coalitions : Optimality and stability. *Econometrica*, pages 987–1003, 1980.

[7] Edith Elkind and Michael Wooldridge. Hedonic coalition nets. In *8th AAMAS*, pages 417–424, 2009.

[8] Ahmadreza Ghaffarizadeh and Vicki H. Allan. History based coalition formation in hedonic context using trust. *Int. J. of AI & Applications*, 4(4) :1–8, 2013.

[9] Andrzej Nowak and Tadeusz Radzik. A solidarity value for n-person transferable utility games. *Int. J. of Game Theory*, 23 :43–48, 1994.

[10] Dominik Peters and Edith Elkind. Simple causes of complexity in hedonic games. In *24th IJCAI*, pages 617–623, 2015.

[11] Jeffrey S. Rosenschein and Gilad Zlotkin. Designing conventions for automated negotiation. *AI magazine*, 15(3) :29, 1994.

[12] Shalom H. Schwartz. An overview of the Schwartz theory of basic values. *Online Readings in Psychology and Culture*, 2(1) :11, 2012.

[13] Lloyd S. Shapley and Martin Shubik. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. *Econometrica*, pages 805–827, 1966.

[14] Shao Chin Sung and Dinko Dimitrov. On myopic stability concepts for hedonic games. *Theory and Decision*, 62(1) :31–45, 2007.