De la diversité des jeux de coalitions à utilité transférable

J. Guéneron[a] G. Bonnet[a]
josselin.gueneron@unicaen.fr gregory.bonnet@unicaen.fr

[a]Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 14000 Caen, France

Résumé

Dans cet article, nous présentons une synthèse des différents modèles de jeux de coalitions. Les jeux de coalitions ont pour objectif de partitionner les agents en groupes, appelés coalitions, pour leur permettre de coopérer. L'intérêt des extensions des jeux de coalitions classiques est alors de pouvoir modéliser des contextes divers (hétérogénéité des capacités des agents, interdépendance des coalitions, incertitude, résolution décentralisée) bien adaptés à des problématiques multi-agents. Nous proposons une classification des modèles selon trois axes ainsi qu'un tour d'horizon des protocoles de résolution décentralisés des jeux de coalitions.

Mots-clés : *Coalitions, Théorie des jeux*

Abstract

In this paper, we present a synthesis of the different models of coalitional games. The aim of such games is to partition the agents into groups, called coalitions, in order to make them cooperate. The interest of extending the classic coalitional games is to model diverse contexts (heterogeneity of agents, interdependence of coalitions, uncertainty, decentralized resolution), which are well adapted to multi-agent contexts. We propose to classify all those models according to three axes as well as an overview of decentralized resolution protocols for coalitional games.

Keywords: *Coalitions, Game Theory*

1 Introduction

Dans les systèmes multi-agents composés d'agents hétérogènes et égoïstes, il est parfois nécessaire de coopérer, c'est-à-dire travailler de concert temporairement afin que les agents puissent réaliser leurs tâches. Nous pouvons penser aux réseaux électriques intelligents [12, 64], aux réseaux de capteurs [30], aux chaînes logistiques automatisées [28], ou toute autre application de systèmes cyber-physiques. Le cadre formel pour modéliser ces situations est la théorie des jeux coopératifs, et plus particulièrement la formation de coalitions.

Dans un *jeu de coalitions*, les agents – égoïstes – d'un système sont amenés à former des groupes (que nous appelons coalitions) afin d'en tirer un gain, en sachant que leur égoïsme les rend enclins à ne pas accepter de former n'importe quelle coalition. Deux grandes familles de jeux existent, les *jeux à utilité transférable* où les agents reçoivent une utilité quantifiée lorsqu'ils coopèrent et qu'ils doivent ensuite partager entre eux [50, 53] ; et les *jeux à utilité non transférable* [50], aussi appelés *jeux hédoniques*, où les agents reçoivent un gain individuel (exprimé sous forme de préférences) qu'ils ne peuvent partager. Les jeux à utilité non transférable étant un cas particulier de jeux à utilité transférable, nous nous concentrons dans cet article sur ces derniers.

L'objectif de cet article est alors de présenter une revue des différents modèles de formation de coalitions, en partant du cadre classique des jeux à utilité transférable puis en relâchant au fur et à mesure ses hypothèses les plus contraignantes. Nous n'avons pas ici la prétention d'être exhaustifs mais de mettre en lumière la diversité des modèles et leur capacité à répondre aux besoins des systèmes multi-agents dans des contextes applicatifs. Cette diversité est représentée en figure 1. L'origine, marquée d'un point plus épais, représente les modèles classiques tandis que les axes représentent chacun le relâchement d'une hypothèse : agents homogènes (axe bleu), coalitions indépendantes (axe noir), gestion de l'incertitude (axe rouge). Le relâchement de ces diverses hypothèses permettent de répondre à certains besoins applicatifs, décrits ci-dessous :

- Agents homogènes : applications impliquant une gestion des ressources distinctes, ou mettant en jeu des agents hétérogènes dans leurs compétences,
- Indépendance : applications comprenant une dimension spatiale dans l'organisation des agents ou la distribution de leurs ressources,
- Déterminisme : applications impliquant de

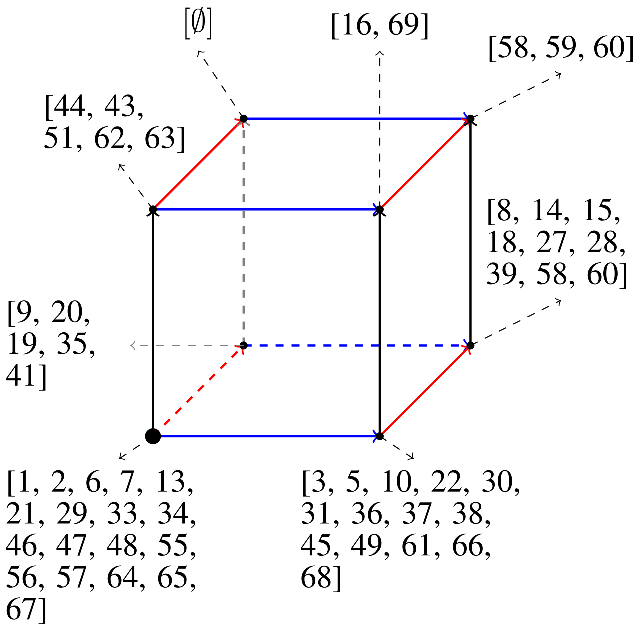

FIGURE 1 – Taxonomie des modèles : à partir du cadre classique (point noir épais), l'axe bleu indique la prise en compte des capacités des agents, l'axe noir indique la prise en compte des dépendances entre coalitions et l'axe rouge indique la prise en compte de l'incertitude

la temporalité ou des événements stochastiques liés aux agents ou à leur environnement.

Nous présentons ainsi dans la section 2 la formation de coalitions pour les jeux à utilité transférable dans sa forme classique, les concepts caractérisant les solutions acceptables par les agents, ainsi que la manière de représenter ces jeux. Dans la section 3, nous présentons des extensions du cadre classique pour modéliser les capacités hétérogènes des agents. Dans la section 4, nous nous intéressons aux cadres qui relâchent l'hypothèse d'indépendance entre les coalitions. La section 5 est consacrée aux cadres incluant de l'incertitude. Enfin, la section 6 propose une revue de protocoles de formation de coalitions permettant la décentralisation.

2 Jeux de coalitions classiques

2.1 Définition formelle

Les jeux de coalitions modélisent des situations où des agents doivent coopérer afin d'obtenir un gain supérieur à ce qu'ils gagneraient s'ils ne coopéraient pas. Lorsque ces agents coopèrent, ils forment des *coalitions*, c'est-à-dire des sous-ensembles d'agents travaillant de concert. Si l'ensemble de tous les agents du système forment une unique coalition, cette dernière est appelée la *grande coalition*. Si un agent reste seul, il forme sa *coalition singleton*.

Definition 1 (Jeu de coalitions) *Un* jeu de coalitions *est un tuple $\mathcal{G} = \langle N, v \rangle$ où :*

— *$N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble d'agents,*

— *$v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique qui à chaque coalition associe une valeur réelle, appelée utilité de la coalition et notée $v(C)$ où $C \subseteq N$.*

Dans les jeux de coalitions classiques [47, 50], les coalitions sont disjointes une à une, chaque agent ne faisant partie que d'une seule coalition. La partition de tous les agents en coalitions forme une *structure de coalitions* sur N.

Definition 2 (Structure de coalitions) *Une* structure de coalitions *$\mathcal{C}$ est une partition de l'ensemble des agents de N en k coalitions disjointes : $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_k\}$ et $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} = N$.*

Une fois les coalitions formées, les agents doivent se répartir l'utilité des coalitions entre les membres de celles-ci. Cette répartition, appelée *imputation*, est définie comme suit.

Definition 3 (Imputation) *Une* imputation *dans une structure de coalitions $\mathcal{C}$ au sein d'un jeu $\mathcal{G}$ est un vecteur de gains tel que $\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, où x_i est le gain de l'agent a_i, et $x_i \geq 0$.*

Ainsi, un *solution* à un jeu de coalitions est une structure de coalitions associée à une imputation.

Definition 4 (Solution d'un jeu de coalitions) *Une* solution *à un jeu de coalitions $\mathcal{G}$ est un tuple $S_{\mathcal{G}} = \langle \mathcal{C}, \vec{x} \rangle$ où :*

— *$\mathcal{C}$ est une structure de coalitions de N,*

— *$\vec{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est une imputation.*

Comme il est fait l'hypothèse que les agents sont égoïstes, ceux-ci cherchent à obtenir un gain maximum. Cela a pour conséquence qu'une solution doit être unanimement acceptée par les agents, c'est-à-dire qu'aucun d'entre eux ne doit être capable de former ou rejoindre une autre coalition dans le but d'obtenir un gain plus important. Si une solution à un jeu de coalitions est acceptée par tous les agents, celle-ci est *stable* [50]. Ces solutions stables appartiennent à des *concepts de solutions*, qui représentent une caractérisation d'une notion de stabilité donnée. Par exemple, cela peut être le fait qu'aucun agent ne peut influencer un autre contre une partie de son gain, ou bien alors qu'aucun ensemble d'agents ne peut former une autre coalition pour augmenter leurs gains globaux.

2.2 Concepts de solutions et valeurs

Les concepts de solutions définissent donc différentes notions de stabilité et d'optimalité. C'est pourquoi une solution stable dans un certain concept peut ne pas l'être dans un autre. Les concepts de solutions se distinguent en deux catégories : les *concepts de solutions ensemblistes* et les *concepts de solutions singletons*.

Les concepts de solutions ensemblistes caractérisent les solutions par des contraintes représentant l'absence d'incitation des agents à dévier d'une coalition donnée. Le concept fondamental est celui de *cœur* [29, 50, 57] mais il peut être vide. C'est pourquoi la littérature propose des généralisations qui relâchent certaines contraintes pour obtenir au moins une solution, comme le *dernier cœur* [42, 46], le *nucléole* [42, 55], le *noyau* [17, 21] ou les *ensembles de marchandage* [17, 24].

Par exemple, le cœur caractérise l'ensemble des solutions où aucun groupe d'agents ne peut former une autre coalition qui lui rapporterait plus, tandis que le noyau caractérise les solutions dans lesquelles aucun agent ne peut rationnellement donner une partie de son gain à un autre pour l'inciter à rejoindre sa coalition.

Une des caractéristiques intéressantes des concepts de solutions ensemblistes est qu'il existe des relations d'inclusion entre eux. Ces relations sont présentées en figure 2. Si le coeur est non vide, alors le nucléole est dans le coeur et se trouve à l'intersection du noyau et du dernier coeur. Ces deux-ci, dont l'union est donc non vide, sont à leur tour inclus dans les ensembles de marchandage [17, 24, 55].

La seconde catégorie de concepts de solutions est celle des concepts de solutions singletons. Ces concepts ne produisent qu'une unique solution en définissant une règle de partage de la valeur produite. Ainsi, à une structure de coalitions donnée, il n'y a qu'une imputation possible. De manière générale, ces règles s'appuient sur la contribution marginale des agents, c'est-à-dire

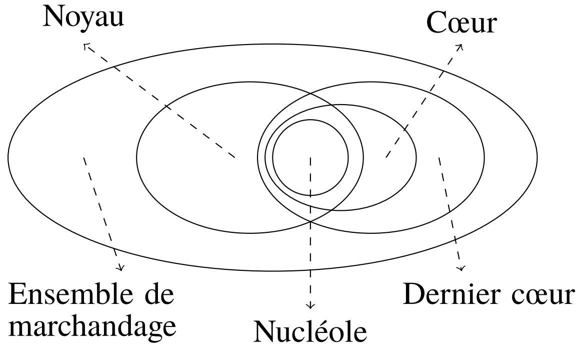

FIGURE 2 – Inclusions entre concepts

ce que les agents apportent en moyenne aux coalitions qu'ils forment. La valeur est ensuite partagée équitablement, c'est-à-dire proportionnellement à la contribution marginale. Ces concepts n'apparaissent pas sur la figure 2 car leur positionnement au sein des concepts ensemblistes est dépendant de propriétés sur la fonction caractéristique. Par exemple, la valeur de Shapley présentée ci-après n'est dans le cœur que si, et seulement si, la grande coalition l'est aussi [17].

Les deux concepts singletons majeurs sont la *valeur de Shapley* [40, 56] et l'*indice de Banzhaf* [6]. La valeur de Shapley est calculée sur l'ensemble des ordres d'arrivée possibles des agents dans les coalitions tandis que l'indice de Banzhaf sur un unique ordre d'arrivée. Ainsi, l'indice de Banzhaf est moins complexe à calculer mais il perd certaines propriétés intéressantes comme l'additivité (la somme des indices de Banzhaf de deux jeux n'est pas égale à l'indice de Banzhaf de la somme de ces deux jeux).

Definition 5 (Répartitions équitables) *Soit* Π *l'ensemble des ordres d'arrivée des agents dans les coalitions et* $\pi(a_i)$ *l'ensemble des agents précédent l'agent* a_i *dans un ordre donné. La valeur de Shapley* ϕ_i *et l'indice de Banzhaf* ψ_i *d'un agent* a_i *sont définis par :*

$$\phi_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi(a_i) \in \Pi} v(\pi(a_i) \cup a_i) - v(\pi(a_i))$$

$$\psi_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{C \subseteq N \setminus a_i} v(C \cup a_i) - v(C)$$

Les concepts de solutions précédents se fondent sur l'équité entre agents, d'autres concepts singletons proposent d'introduire de l'égalité dans les règles de répartition. C'est le cas de la famille des *valeurs de solidarité* [13, 48, 67]. Alors que les répartitions équitables s'appuient sur les contributions marginales individuelles des agents, les répartitions égalitaires s'appuient sur les contributions marginales moyennes au sein d'une coalition donnée, ce qui rend l'utilité obtenue par les valeurs davantage dépendante des synergies entre ces derniers.

Definition 6 (Répartitions égalitaires) *La contribution marginale moyenne d'une coalition C est donnée par :*

$$\mathcal{A}(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{k \in C} [v(C) - v(C \setminus k)]$$

La valeur de solidarité χ_i *de l'agent* a_i *est alors :*

$$\chi_i = \sum_{C \ni a_i} \frac{(n - |C|)!(|C| - 1)!}{n!} \mathcal{A}(C)$$

2.3 Représenter la fonction caractéristique

Au-delà des questions d'algorithmique pour le calcul des solutions, que nous aborderons en section 6, les jeux de coalitions posent aussi des questions en termes de représentation. En effet, le nombre de coalitions possibles augmentant exponentiellement en fonction du nombre d'agents, la fonction caractéristique peut atteindre une taille conséquente. Des travaux ont donc été menés afin de proposer des représentations compactes de la fonction caractéristique.

Parmi celles-ci, nous pouvons trouver les *induced subgraph games* qui utilisent des graphes non-orientés pondérés [23, 32], les *algebraic decision diagrams* qui utilisent des arbres binaires dont les nœuds sont des agents et les feuilles des valeurs [1, 33] ou encore les *marginal contribution networks* [32, 34] qui utilisent des règles d'agrégation et pour lesquels des algorithmes efficaces ont été proposés [11, 25, 63].

3 Jeux à capacités

Dans les jeux de coalitions classiques, les tâches à réaliser sont abstraites : elles ne sont pas représentées et n'existent qu'à travers un ensemble d'agents et l'utilité qu'ils tirent des coalitions. Or, dans une situation plus complexe, les agents peuvent avoir des capacités spécifiques que l'on peut exprimer formellement, et ils peuvent devoir réaliser des tâches précises qui requièrent des compétences diverses. Dans le même ordre d'idée, les agents peuvent être aussi soumis à des contraintes de ressources non-renouvelables : exécuter certaines tâches ou utiliser certaines capacités peut être coûteux pour les agents.

Enfin, les jeux de coalitions classiques ne prennent pas en compte les restrictions que les agents peuvent avoir en termes de communication ou d'accointance : tous les agents peuvent former des coalitions avec tous les autres. Or, dans certains domaines, comme les réseaux pair-à-pair ou les chaînes logistiques [2, 60], les agents sont soumis à de telles contraintes.

Afin que les jeux de coalitions puissent modéliser des systèmes comprenant des tâches requérant des capacités particulières, qu'elles soient décrites de façon qualitative ou quantitative, il a été proposé des jeux à compétences [5, 14, 15, 28, 49, 66] et des jeux à ressources [3, 10, 39, 60, 66, 68] que nous regroupons sous l'appellation *jeux à capacités*. Les tâches devenant explicites, il est ajouté au jeu un ensemble de tâches, que les coalitions doivent réaliser pour en tirer un gain. La fonction caractéristique est alors non plus définie par les coalitions mais par les tâches.

Definition 7 (Jeu à capacités) *Un* jeu de coalitions à capacités *est un tuple* $\mathcal{G} = \langle N, \mathcal{T}, v \rangle$ *où :*

- $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *est un ensemble d'agents,*
- $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_m\}$ *est un ensemble de tâches,*
- $v : 2^{\mathcal{T}} \to \mathbb{R}$ *est une fonction caractéristique qui à chaque ensemble de tâches associe une valeur réelle qui est l'utilité gagnée par une coalition lorsque qu'elle les réalise.*

Les agents sont quant à eux enrichis de capacités. Une capacité qualitative doit être vue comme une compétence pouvant être requise pour la réalisation d'une tâche [5]. Une capacité quantitative peut être vue comme une fiabilité de l'agent, une ressource qu'il possède et peut mettre à profit pour la réalisation d'une tâche, ou bien comme une capacité de stockage [60].

3.1 Capacités qualitatives

Dans le cadre qualitatif, il a été proposé les *jeux à compétences* [5, 49]. Dans ceux-ci, un ensemble de compétences $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ est ajouté au jeu, et les agents possèdent chacun un sous-ensemble $S(a_i) \subset S$ de compétences. À chaque tâche est également associé un sous-ensemble $S(t_j) \subset S$, décrivant l'ensemble des compétences requises pour réaliser cette tâche.

Afin d'obtenir un gain, les agents doivent former des coalitions réunissant les compétences nécessaires à la réalisation des tâches.

Definition 8 (Pouvoir qualitatif) *Le* pouvoir qualitatif *d'une coalition C est défini par $S(C) = \bigcup_{a_i \in C} S(a_i)$. Une coalition C peut réaliser une tâche t_j si, et seulement si, les compétences nécessaires à la tâche sont incluses dans son pouvoir, $S(t_j) \subseteq S(C)$.*

Des sous-classes de ce modèle ont été considérées, comme les *task count skill games*, où la valeur d'une coalition est égale au nombre de tâches qu'elle peut accomplir, et les *weighted task skill games* où elle est égale à la somme de poids associés à chaque tâche [5]. Résoudre un jeu à compétences est dans la même classe de complexité qu'un jeu de coalitions classique, sauf dans le cas favorable où les tâches requièrent un nombre constant de compétences [4].

3.2 Capacités quantitatives

Dans le cadre quantitatif, il a été proposé des *jeux à ressources* comme illustré par le modèle de Shehory et Kraus [60]. Ces jeux considèrent un ensemble de capacités quantitatives $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_r\}$. Les agents ainsi que les tâches sont associés à des vecteurs qui décrivent les ressources disponibles et les ressources requises : $\forall a_i \in N, \vec{b_i} = \langle b_1^i, \ldots, b_r^i \rangle$ et $\forall t_j \in \mathcal{T}, \vec{b_{t_j}} = \langle b_1^{t_j}, \ldots, b_r^{t_j} \rangle$.

Definition 9 (Pouvoir quantitatif) *Le* pouvoir quantitatif *d'une coalition C est donné par un vecteur $\vec{b_C} = \sum_{a_i \in C} \vec{b_i}$. Une coalition peut réaliser une tâche t_j si, et seulement si, les ressources requises sont inférieures aux ressources disponibles : $\forall k \in [1, r], b_k^{t_j} \leq b_k^C$.*

Il existe une sous-classe des jeux à ressources appelés *jeux flous* [3, 10, 68]. Dans ces jeux, il n'y a ni tâches, ni ressources explicites mais, de manière plus abstraite, les agents peuvent choisir leur niveau d'implication dans la coalition (équivalent aux ressources disponibles). La fonction caractéristique est alors dépendante du niveau d'implication de chacun des agents.

Pour des problèmes de chaînes logistiques où les agents sont contraints spatialement et ont des capacités de transport limitées, il a été proposé les *network flow games* (NFG) [22, 31, 36, 37]. Ces modèles représentent la fonction caractéristique par un graphe de flot où les agents sont des arcs et leur capacité est naturellement le flot qui les traversent. La valeur d'une coalition C est alors égale au flot maximum passant uniquement par les agents de la coalition. De manière intéressante, calculer le cœur ou le nucléole d'un NFG simple où tous les agents ont une capacité de 1 est un problème polynomial, mais cela devient NP-difficile dans les autres cas [22, 37].

4 Dépendances entre coalitions

Dans les jeux de coalitions classiques, il est fait l'hypothèse que les coalitions sont indépendantes les unes des autres, au sens où il n'y a que les agents qui composent une coalition qui ont une influence sur l'utilité produite. Cette indépendance est renforcée par le fait que les structures de coalitions sont disjointes, les agents formant alors une partition. Or, dans certains domaines d'application, la formation d'une coalition particulière pourrait tout à fait influer – positivement ou négativement – sur d'autres coalitions. Par exemple dans un réseau pair-à-pair, la formation de certaines coalitions de machines peut réduire l'efficacité des communications d'autres coalitions [44]. Ainsi pour relâcher l'hypothèse d'indépendance, la littérature propose deux approches : les jeux à coalitions recouvrantes et les jeux à externalités.

4.1 Jeux à coalitions recouvrantes

Dans un jeu à compétences, l'indépendance entre les coalitions peut être une limite comme, par exemple, si un agent est le seul à posséder une compétence requise pour plusieurs tâches différentes. Dans le même ordre d'idée, si le pouvoir d'une coalition d'un jeu à ressources surpasse celui requis pour réaliser ses tâches, alors les ressources supplémentaires sont perdues. Ces deux exemples posent une question commune : est-il possible que les agents puissent participer à plusieurs coalitions ? Pour pallier cette limite, la littérature propose les *jeux à coalitions recouvrantes* [16, 59] qui permettent aux agents de participer à plusieurs coalitions simultanément.

Definition 10 (Jeu à coalitions recouvrantes) *Un* jeu à coalitions recouvrantes *est un tuple $\mathcal{G} = \langle N, v \rangle$ où :*

- *$N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ est un ensemble d'agents,*
- *$v : [0, 1]^n \to \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique qui à chaque vecteur de n réels dans*

$[0, 1]$ *associe un réel, appelé utilité de la coalition et noté $v(C)$ où $C \subseteq N$.*

Ces vecteurs de taille n représentent des coalitions, appelées *coalitions recouvrantes*, dont les agents peuvent faire plus ou moins partie. Chaque composante de ces vecteurs décrit donc le niveau d'implication d'un agent donné comme la fraction de ses ressources qu'il attribue à cette coalition. Un agent n'attribuant aucune ressource à une coalition n'en fait donc pas partie. Le nombre d'agents participant à une coalition est appelé le *support* de cette dernière.

Le cadre classique ne permettant pas de décrire une solution dans un jeu de coalitions recouvrantes, les notions d'imputation et de solution, et par extension les concepts de solutions, doivent être redéfinis.

Une imputation pour une structure de coalitions CS (de taille k) est désormais définie par un tuple de k vecteurs de taille n, chacun décrivant la répartition de la valeur de la coalition parmi son support. Les agents qui n'y participent pas ont une valeur nulle. Le gain p_j d'un agent a_j dans une imputation est alors la somme de ses gains dans chaque vecteur du tuple. L'ensemble de toutes les imputations pour la structure de coalitions CS est notée $I(CS)$. Une solution à un jeu à coalitions recouvrantes est donc simplement un tuple consistué d'une structure de coalitions CS et d'une imputation x où $x \in I(CS)$.

Ainsi, le cœur devient comme suit :

Definition 11 (Cœur recouvrant) *Une solution (CS, x) est dans le* cœur recouvrant *si pour tout ensemble d'agents $J \subseteq N$, pour toute structure de coalitions CS_J pour J, et pour toute imputation $y \in I(CS_J)$, nous avons $p_j(CS_J, y) \leq p_j(CS, x)$ pour tout agent $a_j \in J$.*

La complexité des jeux recouvrants est dépendante du montant initial de ressources des agents, de la taille maximale des coalitions et de l'ordre des interactions entre les agents. Le problème de décision associé reste NP-difficile [69].

4.2 Jeux à externalités

Dans certaines situations, les coalitions peuvent influencer les autres. Par exemple, elle peuvent entrer en conflit avec d'autres coalitions lorsqu'elles doivent utiliser des outils ou réaliser des tâches en exclusion mutuelle. Ce type de situation est modélisé par les *jeux à externalités*, aussi appelés *partition function games* (PFG) [62]. Les PFGs définissent une notion de *coalitions intégrées* qui caractérise les coalitions dont l'utilité dépend de la structure de coalitions dans laquelle elles apparaissent.

Definition 12 (Coalition intégrée) *Une* coalition intégrée *est un tuple $(C, \mathcal{C})$ où $C \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ une structure de coalitions. L'ensemble des coalitions intégrées de N est noté E_N. La fonction caractéristique est redéfinie comme suit : $v : E_N \to \mathbb{R}$. Ainsi, $v(C, \mathcal{C})$ est la valeur de la coalition intégrée C dans $\mathcal{C}$.*

Si les concepts de solutions ensemblistes classiques peuvent être facilement redéfinis dans le cadre des PFGs [17, 62], cela n'est pas aussi aisé pour les concepts de solutions singleton car les axiomes garantissant l'unicité de ces concepts dans le cadre classique ne le garantissent plus dans le cadre des PFGs [43]. De plus, calculer des solutions stables devient plus difficile et peu de travaux ont proposé des solutions algorithmiques à ce problème [44, 51, 63] car la taille de la fonction caractéristique dépend maintenant du nombre de structures de coalitions, et non plus du nombre de coalitions.

5 Incertitude dans les jeux

Une autre hypothèse majeure des jeux de coalitions classiques est le fait que la fonction caractéristique est déterministe. En effet, dans le cadre classique, la valeur d'une coalition est connue et le gain obtenu à la coopération des agents est fixe : il n'est soumis à aucun aléa. Dans le même ordre d'idée, les agents ont une connaissance parfaite de la fonction caractéristique. Or, cela implique que les agents ont une connaissance parfaite des compétences ou capacités des autres agents, ainsi que des synergies qu'il existe entre eux. S'affranchir de cela implique alors d'introduire de l'incertitude dans les jeux de coalitions.

5.1 Jeux à informations privées

Une première source d'incertitude peut venir du fait que les agents disposent d'informations privées. Dans la littérature, ces informations privées décrivent les connaissances des agents sur leurs capacités ou celles des autres. Les modèles qui intègrent cette forme d'incertitude sont donc des extensions des jeux à capacités, qu'ils soient quantitatifs [8, 58, 59, 60] ou qualitatifs [39].

Dans un cadre quantitatif, les *jeux à informations privées* ajoutent aux jeux à capacités une *probabilité de succès* associée à chaque agent. Ceci représente une fiabilité dans la réalisation de tâches (et donc une capacité quantitative) [8, 58, 60]. Cette probabilité de succès est une information privée des agents : ils ne connaissent pas les probabilités de succès des autres agents. Les concepts de solutions sont adaptés de manière à considérer les valeurs de coalitions espérées (bien qu'il faille formuler des hypothèses sur la manière dont l'échec d'un agent influe sur la valeur d'une tâche). Il existe deux approches, fondées toutes deux sur la répétition des jeux, pour tenir compte de l'incertitude qui en résulte. D'un côté, dans les travaux de Blankenburg *et al.* [8], les agents doivent observer les coalitions formées pour obtenir leur gain. À partir de cela, ils estiment les capacités des agents qui les composent. Cette estimation forme une confiance envers les autres, confiance qui est ensuite échangée et agrégée par les différents agents pour calculer une estimation globale, sur le même principe que les systèmes de réputations [54]. D'un autre côté, Shehory et Kraus [58, 59, 60] ont une approche plus directe : chaque agent demande explicitement aux autres leur probabilité de succès. Comme ces probabilités peuvent changer au cours du temps, les agents doivent régulièrement communiquer. Il y a donc un fort coût de communication bien que cela réduise l'incertitude.

Dans un cadre qualitatif, l'information privée ne s'applique plus aux capacités. En effet, dans un tel cadre, un agent sait exactement quelles compétences il possède et ces dernières ne sont pas quantifiées. C'est pourquoi dans le modèle de Kraus *et al.* [39], il est ajouté un coût à chaque tâche, coût qui est spécifique à chaque agent. L'information privée porte alors sur ce coût. Kraus *et al.* réduisent alors le problème de formation de coalitions à un problème d'enchères descendantes. Un commissaire-priseur propose des tâches à un prix décroissant et les agents peuvent tous proposer des coalitions. Les membres de ces coalitions peuvent ou non accepter selon ce qu'ils estiment des coûts privés des autres agents.

5.2 Fonctions caractéristiques stochastiques

Dans un jeu classique, la fonction caractéristique qui décrit la valeur produite par une coalition est déterministe. Or, une seconde source d'incertitude peut être non plus les capacités des agents en elles-mêmes mais le résultat de l'exécution des tâches qu'entreprennent les coalitions. En effet, dans un contexte applicatif, il n'est pas garanti que les agents puissent connaître avec certitude le résultat de leurs actions, indépendamment de leurs compétences ou de leurs ressources. Ceci a conduit à définir des *jeux à fonctions caractéristiques stochastiques* [9, 14, 15, 18, 20, 19, 27, 35].

Une première manière de penser cette stochasticité consiste à associer à chaque coalition non pas une valeur mais une variable aléatoire bayésienne [20, 19] ou floue [9, 27, 41]. Par exemple dans le cadre bayésien, les travaux de Charnes et Granot définissent la fonction caractéristique comme $v : 2^N \rightarrow \mathcal{X}_{2^N}$ où les variables aléatoires suivent des lois normales [20, 19]. Les imputations sont calculées à partir du gain espéré des coalitions et les concepts de solutions sont redéfinis sur l'espérance de la fonction caractéristique, comme le *nucléole a priori* [19].

Si cette approche est très générale, elle ne permet pas de modéliser les raisons sous-jacentes à l'incertitude. C'est pourquoi d'autres approches proposent d'augmenter les jeux de coalitions avec un modèle d'environnement stochastique, modélisant le fait que les agents ont une incertitude sur les effets de leurs actions. Par exemple, Chalkiadakis et Boutilier associent des jeux de coalitions à des processus de décision markoviens partiellement observables [15]. Ici, le processus markovien décrit des transitions non-déterministes entre des états du monde en fonction des structures de coalitions formées. Chalkiadakis et Boutilier définissent le *cœur bayésien* [14, 18], qui revient simplement à l'approche de Charnes et Granot, c'est-à-dire en s'appuyant sur l'espérance des valeurs des coalitions en fonction des actions jointes de leurs membres.

Dans le même ordre d'idée, Ieong et Shoham ont, quant à eux, proposé des jeux de coalitions associés à des modèles de mondes possibles [35]. Ici, les agents représentent leur incertitude comme une distribution de probabilités sur un ensemble de mondes, chacun représentant un jeu de coalitions avec une fonction caractéristique déterministe unique. À chaque monde est associé un ensemble fini d'imputations sur lesquelles les agents expriment des préférences. Ieong et Shoham proposent alors de nouveaux concepts de solutions fondés, certes sur les préférences établies par les agents, mais surtout sur une notion de connaissance spécifique. Le concept *ex-ante* caractérise une solution avant l'observation du monde véritable, le concept *ex-interim* après réduction des mondes possibles lors que les agents reçoivent des informations mais avant l'observation du monde véritable, et le concept *ex-post* après l'observation du monde véritable. Sans incertitude, ces trois concepts équivalent au cœur.

6 Résolution décentralisée

Les approches classiques de résolution de jeux de coalitions, qu'elles soient classiques ou qu'elles en soient des variantes, se fondent généralement sur des processus centralisés, exacts ou approchés avec une diversité de méthodes : programmation linéaire, programmation dynamique, algorithmes gloutons, ou méta-heuristiques [52]. Il est important de noter que nous n'abordons pas dans cet article la vaste classe des protocoles de négociation car ceux-ci sont dédiés à la recherche de solutions satisfaisantes pour tous les agents, alors que la formation de coalitions cherche des solutions stables, c'est-à-dire dans lesquels aucun agent ne souhaite dévier. Nous nous intéresserons ici qu'aux algorithmes décentralisés, plus adaptés à un cadre multi-agents. Ces algorithmes sont souvent proposés pour un contexte applicatif spécifique, se restreignant en particulier aux jeux à ressources [28, 30, 45]. Toutefois, ils partagent des bases communes et deux catégories se distinguent : les algorithmes fondés sur des négociations à partir de préférences calculées localement [12, 38, 58, 59, 60, 61], et les algorithmes fondés sur des graphes dynamiques [7, 28, 30, 45, 65].

Dans les approches fondées sur la négociation, une première étape consiste à extraire les préférences des agents sur les coalitions possibles, en calculant leur utilité espérée. Par exemple, Shehory et Kraus [58, 59, 60] établissent ces préférences via un protocole de communication itéré : les agents constituent une liste restreinte de coalitions – d'une taille maximale fixée – qu'ils désirent former et contactent les agents en faisant partie afin de s'enquérir de leurs capacités, ce qui leur permet d'estimer leur valeur. D'autres approches se passent de communication et s'appuient plutôt sur des heuristiques, soit en donnant une préférence aux agents les plus proches dans des modèles spatiaux [38, 61], ou en minimisant les erreurs d'attribution de ressources [12]. Enfin, une fois ces estimations réalisées, la seconde étape consiste à négocier : des coalitions sont proposées (par les agents eux-mêmes ou un commissaire-priseur) et, si tous les membres l'acceptent, elles sont formées.

Dans les approches fondées sur des graphes dynamiques, des contraintes en termes de communication sont ajoutées au modèle : les agents ne peuvent pas communiquer avec n'importe quels autres. Pour cela, nous trouvons des représentations sous forme de *graphes constraints* [7, 65] ou de *réseaux d'agents organisés* [28, 30, 45]. Il s'agit essentiellement d'une distinction cosmétique car les deux représentations possèdent un fonctionnement similaire. La structure de coalitions est représentée par un graphe dont les agents en sont les sommets, et les arêtes entre ces sommets représentent une interaction. Une coalition est un sous-graphe connexe du graphe général. Durant chaque étape du protocole, les agents ne peuvent former des coalitions qu'avec un ensemble de voisins fixés a priori, et décident de cela via des heuristiques. Si deux agents décident de rejoindre une même coalition alors une arête est ajoutée entre eux. Si un agent souhaite quitter une coalition, les arêtes entre cet agent et les membres de la coalition sont détruites. Selon le modèle, la formation de coalitions s'arrête soit après un certain temps [30, 45], soit lorsqu'il n'y a plus de tâches à accomplir [7, 28, 65]. Dans ces modèles, la nature des heuristiques influe évidemment grandement sur l'optimalité de la solution. Par exemple, une politique gloutonne sur les performances des agents produit de bons résultats tandis qu'une heuristique encourageant la diversité des capacités est peu satisfaisante [28, 30]. Enfin, malgré l'ajout de contraintes de communication réduisant le nombre de structures de coalitions possibles à un instant donné, le problème reste NP-complet [65].

Comme souligné ci-dessus, les protocoles décentralisés peinent souvent à trouver et/ou garantir une solution globalement optimale [12, 28, 30, 60]. Cela est notamment au fait qu'ils propose une résolution approchée du problème, en raison du manque d'information.

7 Conclusion

Nous avons présenté ici une synthèse des différents modèles de formation de coalitions, en partant du cadre classique, puis en relâchant au fur et à mesure leurs hypothèses. Trois axes se dégagent : la modélisation des capacités des coalitions, de leur interdépendances et de l'incertitude. Il est important de souligner que les heuristiques employées pour palier le manque d'information et l'incertitude produisent une perte d'optimalité. Proposer des modèles intégrant de l'apprentissage ou des mécanismes d'estimation efficaces, et non pas des heuristiques, nous semble un piste de recherche pertinente. De plus, la question de la temporalité n'est que peu traitée dans la littérature. Elle est certes abordée dans les jeux à incertitude mais uniquement en termes de tours de communication. Il serait donc intéressant d'introduire la temporalité dans les modèles eux-même afin d'exprimer la variation des capacités des agents au cours du temps, ou encore l'évolution des dépendances entre coalitions. Ceci serait particulièrement pertinent pour les modèles spatiaux à capacités pour les étendre à des modèles spatio-temporels, plus adaptés pour traiter des systèmes cyber-physiques comme les chaînes logistiques automatisées. Une dernière question, qui n'est pas traitée dans la littérature référencée, est celle de la manipulation dans les jeux à information privée. En effet, les agents sont supposés honnêtes : il ne mentent pas sur leurs compétences et partagent leurs observations. Dans quelle mesure alors des protocoles robustes aux manipulations, comme ceux étudiés en théorie du choix social computationnel [26], pourraient-ils s'appliquer à la formation de coalitions, et au prix de quelle adaptation ?

Références

[1] K. V. Aadithya, T. P. Michalak, and N. R. Jennings. Representation of coalitional games with algebraic decision diagrams. In *10th AAMAS*, pages 1121–1122, 2011.

[2] K. R. Apt and A. Witzel. A generic approach to coalition formation. *Int. Game Theory Rev.*, 11(3) :347–367, 2009.

[3] J.-P. Aubin. Cooperative fuzzy games. *Math. Oper. Res.*, 6 :1–13, 1981.

[4] H. Aziz and B. De Keijzer. Complexity of coalition structure generation. In *11th AAMAS*, pages 191–198, 2011.

[5] Y. Bachrach and J. S. Rosenschein. Coalitional skill games. In *7th AAMAS*, pages 1023–1030, 2008.

[6] J. F. Banzhaf III. Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis. *Rutgers Univ. Law Rev.*, 19 :317, 1964.

[7] F. Bistaffa, A. Farinelli, J. Cerquides, J. Rodríguez-Aguilar, and S. D. Ramchurn. Algorithms for graph-constrained coalition formation in the real world. *ACM TIST*, 8(4) :1–24, 2017.

[8] B. Blankenburg, R. K. Dash, S. D. Ramchurn, M. Klusch, and N. R. Jennings. Trusted kernel-based coalition formation. In *4th AAMAS*, pages 989–996, 2005.

[9] B. Blankenburg, M. Klush, and O. Shehory. Fuzzy kernel-stable coalitions between rational agents. In *2nd AAMAS*, pages 9–16, 2003.

[10] S. Borkotokey and R. Neog. Dynamic resource allocation in fuzzy coalitions : a game theoretic model. *Fuzzy Optim. Decis. Mak.*, 13 :211–230, 2014.

[11] S. Branzei. State of the art : Solution concepts for coalitional games. *BRAIN*, 1(2) :89–101, 2010.

[12] J. Bremer and S. Lehnhoff. Decentralized coalition formation with agent-based combinatorial heuristics. Technical report, Ediciones Universidad de Salamanca, 2017.

[13] E. Calvo and E. Gutiérrez. Solidarity in games with a coalition structure. *Math. Soc. Sci.*, 60(3) :196–203, 2010.

[14] G. Chalkiadakis and C. Boutilier. Bayesian reinforcement learning for coalition formation under uncertainty. In *3rd AAMAS*, pages 1090–1097, 2004.

[15] G. Chalkiadakis and C. Boutilier. Sequential decision making in repeated coalition formation under uncertainty. In *6th AAMAS*, pages 347–354, 2008.

[16] G. Chalkiadakis, E. Elkind, E. Markakis, and N. R. Jennings. Overlapping coalition formation. In *4th WINE*, pages 307–321, 2008.

[17] G. Chalkiadakis, E. Elkind, and M. J. Wooldridge. Computational aspects of cooperative game theory. *Synth. Lect. Artif. Intell. Mach. Learn.*, 5(6) :1–168, 2011.

[18] G. Chalkiadakis, E. Markakis, and C. Boutilier. Coalition formation under uncertainty : Bargaining equilibria and the Bayesian core stability concept. In *6th AAMAS*, pages 1–8, 2007.

[19] A. Charnes and D. Granot. Prior solutions : Extensions of convex nucleus solutions to chance-constrained games. Technical report, Texas Univ., 1973.

[20] A. Charnes and D. Granot. Coalitional and chance-constrained solutions to n-person games. i : The prior satisficing nucleolus. *SIAM J. Appl. Math.*, 31(2) :358–367, 1976.

[21] M. Davis and M. Maschler. The kernel of a cooperative game. *Nav. Res. Logist.*, 12(3) :223–259, 1965.

[22] X. Deng, Q. Fang, and X. Sun. Finding nucleolus of flow game. *J. Comb. Optim.*, 18(1) :64–86, 2009.

[23] X. Deng and C. H. Papadimitriou. On the complexity of cooperative solution concepts. *Math. Oper. Res.*, 19(2) :257–266, 1994.

[24] E. Einy, D. Monderer, and D. Moreno. The least core, kernel and bargaining sets of large games. *Econ. Theory*, 11(3) :585–601, 1998.

[25] E. Elkind, L. A. Goldberg, P. W. Goldberg, and M. J. Wooldridge. A tractable and expressive class of marginal contribution nets and its applications. *Math. Log. Q.*, 55(4) :362–376, 2009.

[26] U. Endriss. *Trends in computational social choice*. AI Access, 2007.

[27] J. M. Gallardo and A. Jiménez-Losada. A characterization of the Shapley value for cooperative games with fuzzy characteristic function. *Fuzzy Sets Syst.*, 398 :98–111, 2020.

[28] M. E. Gaston and M. desJardins. Agent-organized networks for dynamic team formation. In *4th AAMAS*, pages 230–237, 2005.

[29] D. B. Gillies. Solutions to general non-zero-sum games. *Contributions to the Theory of Games*, 4 :47–85, 1959.

[30] R. Glinton, P. Scerri, and K. Sycara. Agent-based sensor coalition formation. In *11th FUSION*, pages 1–7, 2008.

[31] D. Granot and F. Granot. On some network flow games. *Math. Oper. Res.*, 17(4) :792–841, 1992.

[32] G. Greco, E. Malizia, L. Palopoli, and F. Scarcello. On the complexity of core, kernel, and bargaining set. *Artif. Intell.*, 175(12-13) :1877–1910, 2011.

[33] R. Ichimura, Y. Sakurai, S. Ueda, A. Iwasaki, M. Yokoo, and S. Minato. Compact representation scheme of coalitional games based on multi-terminal zero-suppressed binary decision diagrams. In *Workshop on Social Choice and AI at the 22nd IJCAI*, page 40, 2011.

[34] S. Ieong and Y. Shoham. Marginal contribution nets : A compact representation scheme for coalitional games. In *6th ACM EC*, pages 193–202, 2005.

[35] S. Ieong and Y. Shoham. Bayesian coalitional games. In *23rd AAAI*, pages 95–100, 2008.

[36] E. Kalai and E. Zemel. Totally balanced games and games of flow. *Math. Oper. Res.*, 7(3) :476–478, 1982.

[37] W. Kern and D. Paulusma. Matching games : the least core and the nucleolus. *Math. Oper. Res.*, 28(2) :294–308, 2003.

[38] L. Khalouzadeh, N. Nematbakhsh, and K. Zamanifar. A decentralized coalition formation algorithm among homogeneous agents. *J. Theor. Appl. Inf. Technol.*, 22(1), 2010.

[39] S. Kraus, O. Shehory, and G. Taase. Coalition formation with uncertain heterogeneous information. In *2nd AAMAS*, pages 1–8, 2003.

[40] M. Kurz. Coalitional value. In A.E. Roth, editor, *The Shapley value : essays in honor of Lloyd S. Shapley*, pages 155–173. Cambridge Univ. Press, 1988.

[41] M. Mareš. *Fuzzy Cooperative Games*. Springer, 2001.

[42] M. Maschler, B. Peleg, and L. S. Shapley. Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts. *Math. Oper. Res.*, 4(4) :303–338, 1979.

[43] T. P. Michalak, T. Rahwan, D. Marciniak, M. Szamotulski, and N. R. Jennings. Computational aspects of extending the Shapley value to coalitional games with externalities. In *19th ECAI*, pages 197–202, 2010.

[44] T. P. Michalak, T. Rahwan, J. Sroka, A. Dowell, M. J. Wooldridge, P. J. McBurney, and N. R. Jennings. On representing coalitional games with externalities. In *10th EC*, pages 11–20, 2009.

[45] R.-C. Mihailescu, M. Vasirani, and S. Ossowski. Dynamic coalition adaptation for efficient agent-based virtual power plants. In *9th MATES*, pages 101–112, 2011.

[46] R. Mochaourab and E. A. Jorswieck. Coalitional games in MISO interference channels : Epsilon-core and coalition structure stable set. *IEEE Trans. Signal Process.*, 62(24) :6507–6520, 2014.

[47] O. Morgenstern and J. Von Neumann. *Theory of games and economic behavior*. Princeton Univ. Press, 1953.

[48] A. S. Nowak and T. Radzik. A solidarity value for n-person transferable utility games. *Int. J. Game Theory*, 23(1) :43–48, 1994.

[49] N. Ohta, A. Iwasaki, M. Yokoo, K. Maruono, V. Conitzer, and T. Sandholm. A compact representation scheme for coalitional games in open anonymous environments. In *21st AAAI*, volume 6, pages 509–514, 2006.

[50] M. J. Osborne and A. Rubinstein. *A course in game theory*. MIT press, 1994.

[51] T. Rahwan, T. Michalak, M. J. Wooldridge, and N. R. Jennings. Anytime coalition structure generation in multi-agent systems with positive or negative externalities. *Artif. Intell.*, 186 :95–122, 2012.

[52] T. Rahwan, T. P. Michalak, M. J. Wooldridge, and N. R. Jennings. Coalition structure generation : A survey. *Artif. Intell.*, 229 :139–174, 2015.

[53] D. Ray. *A game-theoretic perspective on coalition formation*. Oxford Univer. Press, 2007.

[54] J. Sabater and C. Sierra. Review on computational trust and reputation models. *Artif. Intell. Rev.*, 24(1) :33–60, 2005.

[55] D. Schmeidler. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.*, 17(6) :1163–1170, 1969.

[56] L. S. Shapley. A value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, 2(28) :307–317, 1953.

[57] L. S. Shapley and M. Shubik. Quasi-cores in a monetary economy with nonconvex preferences. *Econometrica*, pages 805–827, 1966.

[58] O. Shehory and S. Kraus. Task allocation via coalition formation among autonomous agents. In *14th IJCAI*, pages 655–661, 1995.

[59] O. Shehory and S. Kraus. Formation of overlapping coalitions for precedence-ordered task-execution among autonomous agents. In *2nd ICMAS*, pages 330–337, 1996.

[60] O. Shehory and S. Kraus. Methods for task allocation via agent coalition formation. *Artif. Intell.*, 101(1-2) :165–200, 1998.

[61] M. Sims, C. V. Goldman, and V. Lesser. Self-organization through bottom-up coalition formation. In *2nd AAMAS*, pages 867–874, 2003.

[62] R. M. Thrall and W. F. Lucas. N-person games in partition function form. *Nav. Res. Logist.*, 10(1) :281–298, 1963.

[63] S. Ueda, S. Hasegawa, N. Hashimoto, N. Ohta, A. Iwasaki, and M. Yokoo. Handling negative value rules in MC-net-based coalition structure generation. In *11th AAMAS*, volume 12, pages 795–804, 2012.

[64] M. Vinyals, F. Bistaffa, A. Farinelli, and A. Rogers. Stable coalition formation among energy consumers in the smart grid. In *3rd ATES*, page 35, 2012.

[65] T. Voice, M. Polukarov, and N. R. Jennings. Coalition structure generation over graphs. *J. Artif. Intell. Res.*, 45 :165–196, 2012.

[66] M. J. Wooldridge and P. E. Dunne. On the computational complexity of coalitional resource games. *Artif. Intell.*, 170(10) :835–871, 2006.

[67] G. Xu, H. Dai, D. Hou, and H. Sun. A-potential function and a non-cooperative foundation for the solidarity value. *Oper. Res. Lett.*, 44 :86–91, 2016.

[68] G. Xu, X. Lia, H. Suna, and J. Su. The Myerson value for cooperative games on communication structure with fuzzy coalition. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 33 :27–39, 2017.

[69] Y. Zick, G. Chalkiadakis, and E. Elkind. Overlapping coalition formation games : Charting the tractability frontier. In *11th AAMAS*, pages 787–794, 2012.